www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

SECONDE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Notations

On désigne par $\mathbb{R}$ le corps des réels et on pose $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, O ouvert de $\mathbb{R}^p$, on désigne par $C^k(O;\mathbb{R})$ l'espace des applications continues de O dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k continues dans O.

Thème général

a étant un réel positif et V étant une fonction C^∞ à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}$, bornée inférieurement, on se propose d'étudier des triplets (u, λ, a) avec u dans $C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ non identiquement nul, λ réel et a réel strictement positif tels que :

$$(DN)\quad \begin{cases} -\,d^2u/dx^2 + (V(x) - \lambda)\,u(x) = 0 \quad \text{dans } [0,a] \\ u(0) = 0\,;\ u'(a) = 0 \end{cases}$$

PARTIE I

Soit $W(x) \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$. On cherche à construire une solution $Y(x)$ de :

$$(1)\quad \begin{cases} -\,Y''(x) + W(x)\,Y(x) = 0 \\ Y(0) = 0\,;\ Y'(0) = 1 \\ \text{avec } Y \text{ dans } C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) \end{cases}$$

a. Montrer qu'une telle solution est unique.

b. On définit, pour Y dans $C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$, la fonction $Q_W(Y)$ dans $C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ par :

$$Q_W(Y)(x) = x + \int_0^x (x - t)\,W(t)\,Y(t)\,dt$$

Montrer que Y est solution de (1) si et seulement si Y vérifie :

$$(2)\quad \begin{cases} Y \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R}) \\ Q_W(Y) = Y \end{cases}$$

c. Partant de la solution notée Y^0 du problème (1) avec $W = 0$, on introduit par récurrence la suite :

$$(3)\qquad Y^n = Q_W(Y^{n-1}),\ \text{pour } n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant 1)$$

On posera : $u^0 = Y^0$; $u^n = Y^n - Y^{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.
Montrer que pour tout $R > 0$, il existe une constante $M_R > 0$ telle que, pour tout $x \in [-R, R]$, on ait :

$$(4)\qquad |u^n(x)| \leqslant M_R^{n+1}\,|x|^{2n+1}/(2n+1)!$$

d. En déduire que la suite Y^n converge uniformément sur tout compact vers la solution Y du problème (1).

e. On suppose que W dépend d'un paramètre λ parcourant un ouvert O de $\mathbb{R}^p$. Plus précisément, on suppose que $W : (x, \lambda) \mapsto W(x, \lambda)$ appartient à $C^1(\mathbb{R} \times O;\mathbb{R})$. On pose $W_\lambda(x) = W(x, \lambda)$. On note Y_λ la solution de (1) avec $W = W_\lambda$ et on définit ainsi une fonction Y de $\mathbb{R} \times O$ dans $\mathbb{R}$ par : $Y(x, \lambda) = Y_\lambda(x)$. Montrer que Y appartient à $C^1(\mathbb{R} \times O;\mathbb{R})$.

On pourra utiliser dans la suite que, si W appartient à $C^3(\mathbb{R} \times O;\mathbb{R})$, alors Y appartient à $C^3(\mathbb{R} \times O;\mathbb{R})$.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE II

On prend maintenant $O = \mathbb{R}$, $W_\lambda = V - \lambda$. On notera $(1)_\lambda$ le problème (1) avec $W = W_\lambda$. On utilisera les notations $\partial Y/\partial x$ et $\partial Y/\partial \lambda$ pour les dérivées partielles par rapport à x et λ de Y.

a. Soit $(a, \lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une solution u non nulle du problème (DN), si et seulement si on a :

(5) $$(\partial Y/\partial x)(a, \lambda) = 0.$$

Décrire alors l'ensemble des solutions u de (DN) pour des couples (a, λ) dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ vérifiant (5).

b. Établir la formule :

(6) $$(\partial Y/\partial \lambda)(a, \lambda)\cdot(\partial Y/\partial x)(a, \lambda) - Y(a, \lambda)\cdot(\partial^2 Y/\partial x\cdot\partial \lambda)(a, \lambda) = \int_0^a Y(x, \lambda)^2\, dx$$

c. Montrer que, si (a_0, λ_0) vérifie (5), alors il existe un intervalle ouvert $I(a_0)$ contenant a_0 et une fonction $a \to \mu_0(a)$ appartenant à $C^1(I(a_0); \mathbb{R})$ tels que :

(7) $$\mu_0(a_0) = \lambda_0 \ ; \quad (\partial Y/\partial x)\ (a, \mu_0(a)) = 0 \quad \text{dans } I(a_0).$$

Quelles sont les conséquences pour la solution du problème (DN) ?

d. Sous les hypothèses de II.*c*, montrer qu'il existe un intervalle ouvert $\dot{I}(a_0)$ contenant a_0 (avec $\dot{I}(a_0)$ inclus dans $I(a_0)$) et une fonction $a \to c(a)$ dans $C^1(\dot{I}(a_0); \mathbb{R})$ strictement négative tels que :

(8) $$\mu_0'(a) = c(a)\ (\mu_0(a) - V(a)).$$

PARTIE III

On étudie dans cette partie (où on garde les hypothèses de la partie II) la localisation de certains zéros de la solution Y_λ de $(1)_\lambda$.

a. Montrer que si x est un zéro de Y_λ alors ce zéro est isolé et que $Y_\lambda'(x)$ est non nul.

b. Soient W_1 et W_2 deux fonctions appartenant à $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et v_1 et v_2 des solutions appartenant à $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de :

$$-v_1'' + W_1 v_1 = 0; \qquad -v_2'' + W_2 v_2 = 0.$$

Montrer que :

(9) $$(v_1\cdot v_2' - v_2\cdot v_1')'(x) = -(W_1 - W_2)(x)\, v_1(x)\cdot v_2(x)$$

c. Soient $x_1 < x_2$ tels que v_1 vérifie de plus :

$$v_1(x_1) = v_1(x_2) = 0, \text{ et } v_1(x) > 0 \text{ sur }]x_1, x_2[.$$

Montrer que, si $W_1 > W_2$ sur l'intervalle $]x_1, x_2[$, alors il existe x_{12} dans $]x_1, x_2[$ tel que $v_2(x_{12}) = 0$.

On utilisera la relation (9) intégrée sur un intervalle convenable.

d. Montrer qu'il existe Λ_0 tel que, pour $\lambda \geqslant \Lambda_0$, $Y_\lambda(x)$ admette dans $\mathbb{R}_+^*$ un plus petit zéro $x(\lambda)$; montrer que $x(\lambda)$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

On pourra appliquer III.*c*. avec $W_2(x) = V(x) - \lambda$ et W_1 une fonction constante à choisir.

Tournez la page S.V.P.

e. On rappelle que V est supposée bornée inférieurement. Montrer qu'il existe Λ_1 tel que, pour $\lambda \leqslant \Lambda_1$, $Y_\lambda(x)$ n'ait pas de zéro dans $]0, \infty[$.

On pourra appliquer III.*c.* avec $W_1(x) = V(x) - \lambda$ et W_2 une fonction constante à choisir.

f. On introduit l'ensemble $\Omega = \{(x, \lambda) \in]0, \infty[\times \mathbb{R};\ Y(x, \lambda) = 0\}$.

Montrer que Ω est non vide et que, si on désigne par π la projection $(x, \lambda) \to \lambda$, alors $\omega = \pi(\Omega)$ est un intervalle ouvert de la forme $]\lambda_0, \infty[$.

g. Pour tout $\lambda \in]\lambda_0, \infty[$, on pose :

$$x_0(\lambda) = \operatorname{Inf} \Omega_\lambda \quad \text{où} \quad \Omega_\lambda = Y_\lambda^{-1}(\{0\}) \cap]0, \infty[.$$

Vérifier que :

$$x_0(\lambda) > 0,\ Y(x_0(\lambda), \lambda) = 0,\ Y(x, \lambda) > 0 \text{ dans }]0, x_0(\lambda)[$$

et montrer, en se rappelant la formule (6), que la fonction $\lambda \to x_0(\lambda)$ appartient à $C^1(]\lambda_0, \infty[; \mathbb{R})$.

h. Montrer que $\lambda \to x_0(\lambda)$ est monotone strictement décroissante.

i. Montrer que $x_0(\lambda) \to \infty$ pour $\lambda \to \lambda_0\ (\lambda > \lambda_0)$ et que $x_0(\lambda) \to 0$ lorsque $\lambda \to +\infty$.

j. Montrer que, pour tout $a > 0$, il existe un unique $\lambda(a) \in]\lambda_0, \infty[$ tel que :

$$Y(x, \lambda(a)) > 0 \text{ sur }]0, a[,\ Y(a, \lambda(a)) = 0.$$

PARTIE IV

a. En utilisant II.*b.*, montrer que, pour tout $x > 0$:

$$\lambda \mapsto \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)(x, \lambda) \Big/ Y(x, \lambda) \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty, \lambda(x)[.$$

b. Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)(x, \lambda) \Big/ Y(x, \lambda) \text{ tend vers } -\infty \text{ lorsque } \lambda \to \lambda(x) \text{ (avec } \lambda < \lambda(x)).$$

c. En utilisant III *b.* et III *e.*, montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)(x, \lambda) \Big/ Y(x, \lambda) \text{ tend vers } +\infty \text{ lorsque } \lambda \to -\infty.$$

d. En déduire que, pour tout $a > 0$, il existe un unique $\mu(a)$ dans $]-\infty, \lambda(a)[$ tel que :

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)(a, \mu(a)) = 0;\quad Y(x, \mu(a)) > 0 \text{ sur }]0, a[.$$

Tournez la page S.V.P.

PARTIE V

Cette dernière partie est consacrée à l'étude du graphe de μ sur l'intervalle $]0, \infty[$ dans le cas particulier où : $V(x) = x^2$.

On posera, pour $a > 0$, $\tilde{Y}(x, a) = Y(x, \mu(a))$.

a. On considère, pour $\rho \in]-1, 1[$ et $\tau \in \mathbb{R}$, le problème suivant :

trouver v dans $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que :

$$(10)_{\rho,\tau} \quad \begin{cases} -\dfrac{d^2 v}{dy^2} + (\rho y^2 - \tau)\, v(y) = 0 \text{ dans }]0, 1[\\ v(0) = 0;\ v'(0) = 1,\ v'(1) = 0. \end{cases}$$

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une application $\rho \to \tau(\rho)$ dans $C^1(]-\varepsilon, \varepsilon[, \mathbb{R})$ tels que $(10)_{\rho,\tau(\rho)}$ ait une unique solution avec $v(y) > 0$ pour $y \in]0, 1[$.

b. Déduire de V.*a.* en utilisant le changement de variable $y = \dfrac{x}{a}$ que $\mu(a)$ tend vers $+\infty$ lorsque a tend vers 0 et donner alors un équivalent de $\mu(a)$.

c. On veut maintenant étudier le comportement de $\mu(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Montrer qu'il existe $\mu_\infty > 0$ et une solution $\tilde{Y}_\infty$ (que l'on cherchera de la forme : $P(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ où $P(x)$ est un polynôme) telle que :

$$\begin{cases} -\tilde{Y}_\infty'' + (x^2 - \mu_\infty)\, \tilde{Y}_\infty = 0 \text{ dans }]0, \infty[\\ \tilde{Y}_\infty(0) = 0;\ \tilde{Y}_\infty'(0) = 1;\ \tilde{Y}_\infty(x) \to 0 \text{ quand } x \to \infty;\ \tilde{Y}_\infty(x) > 0 \text{ sur }]0, \infty[. \end{cases}$$

d. Montrer qu'il existe $a_0 > 0$ tel que, pour $a > a_0$, on ait : $0 < \mu(a) < \mu_\infty$.

On pourra étudier : $\displaystyle\int_0^a (-\tilde{Y}_\infty''(x) + (x^2 - \mu_\infty)\, \tilde{Y}_\infty(x)) \cdot \tilde{Y}(x, a)\, dx$ et penser à des intégrations par parties.

e. Montrer qu'il existe $C > 0$ et $a_1 > 0$ tels que :

$$|\tilde{Y}(a, a)| \leqslant C\, |a|^{\frac{1}{4}} \text{ pour } a > a_1.$$

On pourra d'abord démontrer qu'il existe $C_0 > 0$, $\xi > 0$, $a_2 > 0$ tels que l'estimation :

$$\int_0^a \left| \left(\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x} \right)(x, a) \right|^2 dx \leqslant C_0 \int_0^\xi |\tilde{Y}(x, a)|^2\, dx$$

soit vérifiée pour tout $a > a_2$.

f. Montrer alors que $\mu(a) \to \mu_\infty$ lorsque $a \to +\infty$. Quelle est la rapidité de la convergence ?

g. En appliquant (8) et ce qui précède dans cette partie, montrer que $a \mapsto \mu(a)$ admet un unique minimum dans $]0, \infty[$ et tracer le graphe de μ.

• • •
•

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail